

Ejercicios para la Guía N° 3. Funciones¹

1.- Para la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$, determine:

(a) $f(0)$ (b) $f(x^2)$ (c) $f(-a)$ (d) $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (e) $f(\sqrt{x})$

2.- Para la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$, determine:

(a) $f(2)$ (b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f\left(x - \frac{1}{x}\right)$ (d) $xf(x) - f(1)$

3.- Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ \llbracket x + 1 \rrbracket & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(\pi)$.

4.- Para las funciones dadas a continuación, determine y simplifique la expresión

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}:$$

(a) $f(x) = 2x^2 - 1$ (b) $f(x) = \frac{3}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x+4}$ (d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

5.- Determine el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{x-5}$ (b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ (c) $f(x) = 1 - \frac{1}{\llbracket x \rrbracket}$

(d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ (e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (f) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$

(g) $f(x) = \sqrt{1 - |x + 2|}$

6.- A partir de la gráfica de funciones elementales, realice la gráfica de las siguientes funciones. Indique además su dominio y rango.

(a) $f(x) = -|x - 1|$ (b) $f(x) = \llbracket x \rrbracket + 2$ (c) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

(d) $f(x) = x^2 - x - 2$ (e) $f(x) = |x^2 - x - 2|$ (f) $f(x) = \sqrt{x - 1} + 1$

(g) $f(x) = -|x| + 1$ (h) $f(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$ (i) $f(x) = x^3 + 2$

¹ Profesora María T. Varela

$$(j) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(k) f(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$(l) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$(m) f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$(n) f(x) = |\text{sen } x|$$

7.- A partir de la gráfica de funciones elementales, realice la gráfica de las siguientes funciones en el intervalo indicado.

$$(a) f(x) = \cos(3x) - 1 \text{ en } [0, 2\pi]$$

$$(b) f(x) = 2 - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ en } [0, 4\pi]$$

$$(c) f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en } [-\pi, 3\pi]$$

$$(d) f(x) = 3\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ en } [-\pi, 3\pi]$$

8.- Para $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = \frac{2}{x+3}$, determine cada uno de los siguientes valores:

$$(a) (f - g)(2)$$

$$(b) \left(\frac{f}{g}\right)(1)$$

$$(c) (g \circ g)(3)$$

$$(d) (f \circ g)(1)$$

$$(e) (g \circ f)(1)$$

$$(f) (f \circ f)(-1)$$

9.- Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, determine $(g - f)(x)$ y $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ y sus respectivos dominios.

10.- Para los siguientes pares de funciones, determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios:

$$(a) f(x) = \frac{1}{3x+1}, g(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{2x-1}, g(x) = x^2 + 3$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x + 1$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, g(x) = \frac{2}{x}$$

11.- Para los siguientes pares de funciones, realice la gráfica de cada una de ellas y determine $(g \circ f)(x)$.

$$(a) f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = 4 - |x| \text{ y } g(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = x^2 - 5 \text{ y } g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < -1 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

12.- Sean:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Realice el gráfico de ambas funciones.

(b) Determine $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ f)(2)$ y $(g \circ g)(-1)$

13.- Sean $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = -x$. Pruebe que:

$$(f \circ h)(x) = (g \circ f)(x)$$

14.- Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, hallar $(f \circ f)(x)$ y bosquejar su gráfica.

15.- Para cada una de las siguientes funciones, diga, justificando si es o no inyectiva y para aquellas que lo sean halle la inversa $f^{-1}(x)$

- (a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$ (b) $f(x) = x^2$, para $x \in (-7, -2)$ (c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$
(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in [-1, 0]$ (e) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (f) $f(x) = |x|$
(g) $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$ (h) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+4}$ (i) $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$
(j) $f(x) = (5x+12)^2$ (k) $f(x) = (5x+12)^2$, para $x \geq -\frac{12}{5}$ (l) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

16.- Pruebe que cada una de las siguientes funciones es su propia inversa:

(a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$ (b) $f(x) = -\frac{x}{x+1}$

17.- Sea $f(x) = a - \frac{1}{x+b}$, donde a y b satisfacen que $a + b = 1$. Pruebe que:

$$f^{-1}(x) = a - \frac{1}{1 - \frac{1}{x+b}}$$

18.- Hallar:

- (a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\arctan(1)$
(d) $\cos\left(\arcsen\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ (e) $\sin\left(\arcsen\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ (f) $\tan\left(\arcsen\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$
(g) $\arcsen\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$